**WORKSHOP PULSARS THEORIES ET OBSERVATIONS**

**24-26th November 2008**

**Salle de l'Atelier,** Observatoire de Paris

# Formation et évolution du système planétaire de PSR B1257+12

Laurent Nottale

CNRS

LUTh, Observatoire de Paris-Meudon

http://luth.obspm.fr/~luthier/nottale

# Rappel théorique

Nottale, L., 1993, Fractal Space-Time and Microphysics: Towards a Theory of Scale Relativity, World Scientific
Nottale, L., 1997, Astron. Astrophys. 327, 867
Célérier M.-N. & Nottale, L., 2004, J. Phys. A, 37, 931 (arXiv: quant-ph/0609161)
Nottale L.& Célérier M.N., 2007, J. Phys. A: Math. Theor., 40, 14471 (arXiv:0711.2418 [quant-ph])

# Méthode

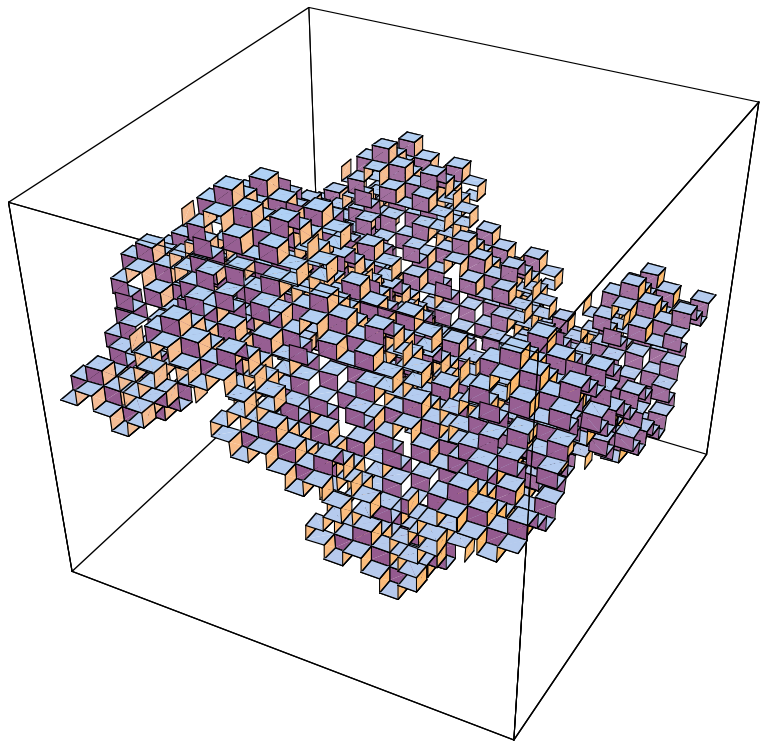
Rappel: modèle de formation (Nottale 1993) de systèmes planétaires--> couplage avec le disque du mouvement des planétésimaux / protoplanètes (« migration »): on suppose que l'effet principal vient de l'interaction gravitationnelle par les plus proches voisins -->

Applicabilité:
-systèmes pour lesquels est perdue l'information sur
*les angles : infinité de géodésiques, diffusion
*la position : trajectoires fractales ($D_F = 2$), mvt Brownien
*le temps : irréversibilité locale (dt <—>-dt)

-dépendance d'échelle explicite sur un rapport d'échelle au moins $10^5$

En particulier :
chaos ergodique, pour $\Delta t > \tau$, horizon de prédictibilité
($\tau \approx 10/\lambda$, où $\lambda$ = exposant de Lyapunov)

# Road toward Schrödinger (1): infinity of geodesics



—> generalized « fluid » approach:

$$V(t) \to V[x(t), t, \delta t] = v[x(t), t] + W[x(t), t, \delta t]$$

Differentiable

Non-differentiable

# Road toward Schrödinger (2): 'differentiable part' and 'fractal part'

Minimal scale law (in terms of the *space* resolution):

$$\mathcal{L}(x,\varepsilon) = \mathcal{L}_0(x)\left[1+\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)^{\delta}\right]$$

$$(\varepsilon_x/\lambda)^{D_F} = (\varepsilon_t/\lambda)$$

Differential version (in terms of the *time* resolution):

$$dX = dx + d\xi$$

$$dx = v\,dt$$

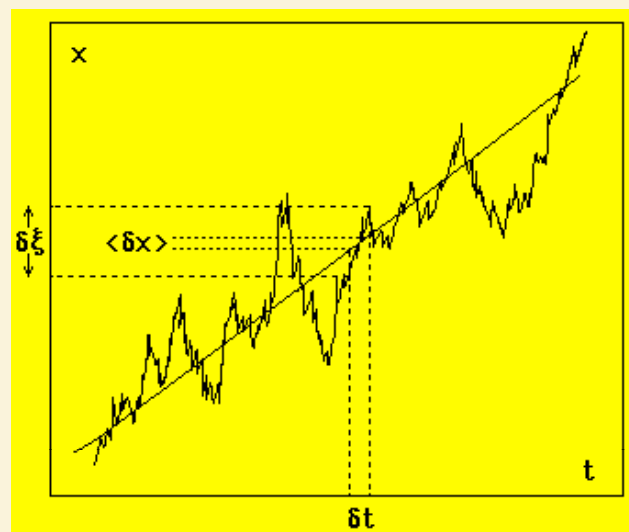
$$d\xi = \eta\sqrt{2\mathcal{D}}(dt^2)^{1/2D_F}$$

Stochastic variable:

$$<\eta>=0 \quad <\eta^2>=1$$

Case of the critical fractal dimension $D_F = 2$:

$$d\xi = \eta\sqrt{2\mathcal{D}}dt^{1/2}$$



# Road toward Schrödinger (3): non-differentiability —> complex numbers

Standard definition of derivative

$$\frac{df}{dt} = \lim_{dt \to 0} \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt} = \lim_{dt \to 0} \frac{f(t) - f(t-dt)}{dt}$$

DOES NOT EXIST ANY LONGER —> new definition

*f*(*t*,*dt*) = fractal fonction (equivalence class, cf LN93)

Explicit fonction of *dt* = scale variable (generalized « resolution »)

$$f'_+(t,dt) = \frac{f(t+dt,dt) - f(t,dt)}{dt} \qquad f'_-(t,dt) = \frac{f(t,dt) - f(t-dt,dt)}{dt}$$

TWO definitions instead of one: they transform one in another by the reflection (*dt* <—> -*dt* )

$$\left.\begin{aligned} dX_+(t) &= v_+ \; dt + d\xi_+(t) \\ dX_-(t) &= v_- \; dt + d\xi_-(t) \end{aligned}\right| \qquad \mathcal{V} = \frac{v_+ + v_-}{2} - i \, \frac{v_+ - v_-}{2}$$

# Covariant derivative operator

$$\frac{d\!\!\!^{-}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{d_+}{dt} + \frac{d_-}{dt}\right) - \frac{i}{2}\left(\frac{d_+}{dt} - \frac{d_-}{dt}\right)$$

Classical (differentiable) part

$$\mathcal{V} = \frac{d\!\!\!^{-}}{dt}x(t) = V - iU = \frac{v_+ + v_-}{2} - i\,\frac{v_+ - v_-}{2}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dX_i}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\frac{dX_i dX_j}{dt}$$

$$< \frac{dX_i}{dt} >= \frac{dx_i}{dt} \qquad < \frac{dX_i dX_j}{dt} >=< \frac{d\xi_i d\xi_j}{dt} >= 2\mathcal{D}\,\delta_{ij}$$

$$\frac{d_\pm f}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_\pm.\nabla \pm \mathcal{D}\,\Delta\right) f$$

$$\boxed{\frac{d\!\!\!^{-}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{V}.\nabla - i\mathcal{D}\Delta}$$

# RELATIVITE D'ECHELLE –> EQU. SCHRODINGER

Nondifférentiabilité + fractalité --> Opérateur de dérivation covariante

$$\frac{d'}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{V}.\nabla - i\mathcal{D}\Delta$$

Equation fondamentale de la dynamique

$$\frac{d'\mathcal{V}}{dt} = -\nabla\phi$$

Changement de variables (*S* = action complexe) et intégration

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \mathcal{V}, t)dt \qquad \psi = e^{i\mathcal{S}/2m\mathcal{D}}$$

Equation de Schrödinger généralisée

$$\mathcal{D}^2\Delta\psi + i\mathcal{D}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}\phi\,\psi = 0$$

Newton

$$m\frac{d}{dt}\mathcal{V} = -\nabla\Phi$$

$$\mathcal{V} = \nabla\mathcal{S}/m$$

$$\psi = e^{i\mathcal{S}/\mathcal{S}_0}$$

$$\mathcal{V} = -i\,\frac{\mathcal{S}_0}{m}\,\nabla(\ln\psi)$$

$$i\mathcal{S}_0\frac{d}{dt}(\nabla\ln\psi) = \nabla\Phi$$

$$\nabla\Phi = i\mathcal{S}_0\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{V}.\nabla - i\mathcal{D}\Delta\right)(\nabla\ln\psi)$$

$$\nabla\Phi = i\mathcal{S}_0\left[\frac{\partial}{\partial t}\nabla\ln\psi - i\left\{\frac{\mathcal{S}_0}{m}(\nabla\ln\psi.\nabla)(\nabla\ln\psi) + \mathcal{D}\Delta(\nabla\ln\psi)\right\}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{V} = -2\mathcal{D}\nabla\left\{i\frac{\partial}{\partial t}\ln\psi + \mathcal{D}\frac{\Delta\psi}{\psi}\right\} = -\nabla\Phi/m$$

$$\mathcal{S}_0 = 2m\mathcal{D}$$

Schrödinger

$$\mathcal{D}^2\Delta\psi + i\mathcal{D}\frac{\partial}{\partial t}\psi - \frac{\Phi}{2m}\psi = 0$$

# Trois formes / représentations

Géodésique ($U$,$V$)

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = -\nabla\left(\frac{\phi}{m}\right)$$

Schrödinger généralisé ($P$,$\theta$)

$$\mathcal{D}^2 \triangle \psi + i\mathcal{D}\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{\phi}{2m}\psi$$

Euler + continuité ( $P$, $V$) + potentiel « noir »

$$m\,(\frac{\partial}{\partial t} + V\cdot\nabla)V = -\nabla(\phi + Q)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathrm{div}(PV) = 0$$

Nouvelle énergie “potentielle”:

$$Q = -2m\mathcal{D}^2\frac{\Delta\sqrt{P}}{\sqrt{P}}$$

# Comparaison à la théorie standard
## de formation des structures

Théorie standard minimale:
Euler-Poisson + continuité
+ matière noire

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla\right) V = -\nabla\phi$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho V) = 0$$

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho$$

$$\Delta\phi_N = 4\pi G\rho_N$$

Relativité d'échelle:
$\phi$ = potentiel, $\rho = m_1 \;\; P$

$$(\frac{\partial}{\partial t} + V \cdot \nabla)V = -\nabla(\phi + Q)$$

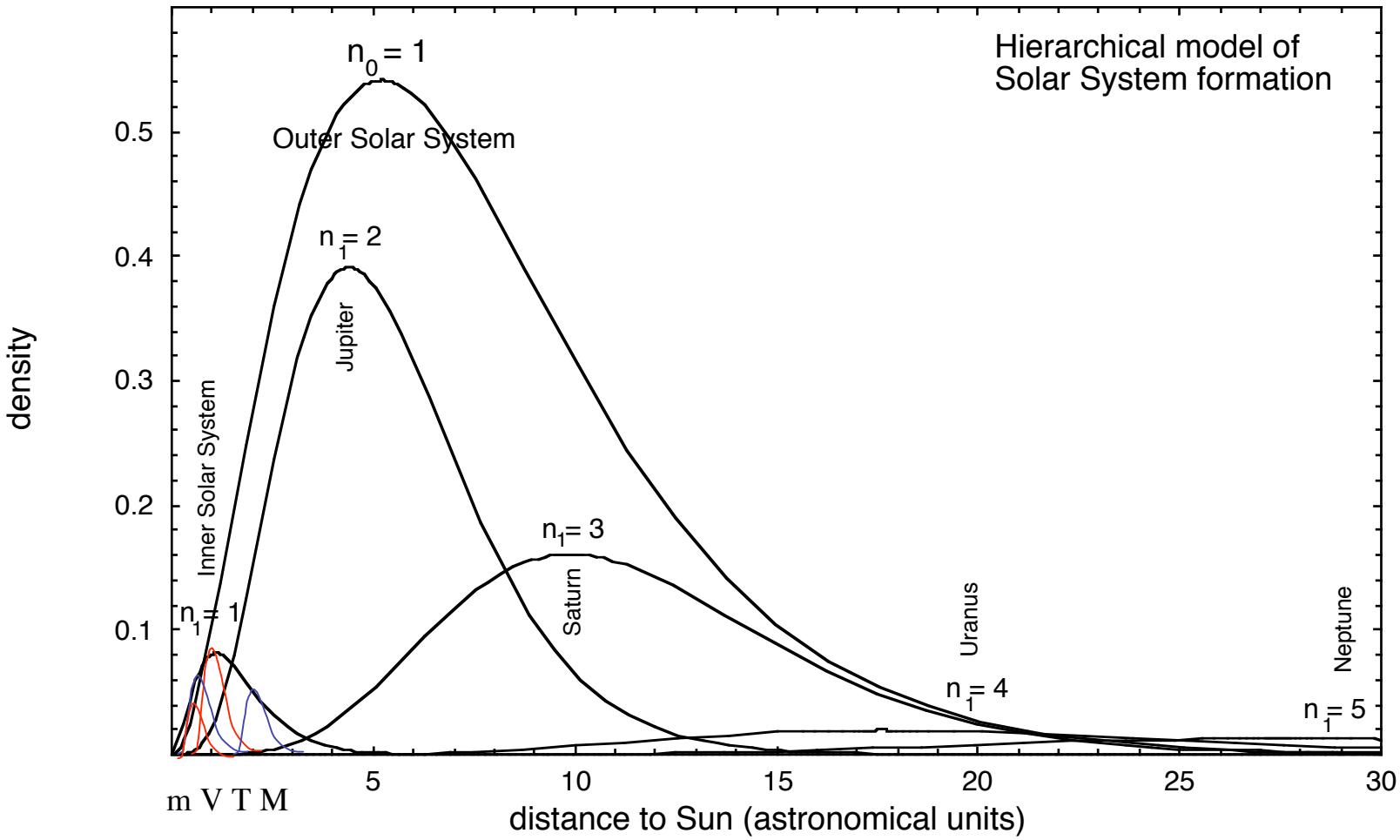
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho V) = 0$$

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho$$

$$Q = -2\mathcal{D}^2 \frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$$

$Q$ = Potentiel « noir » ?

# Solutions: potentiel Képlerien



# Simulation of trajectory

Kepler central potential *GM*/*r*

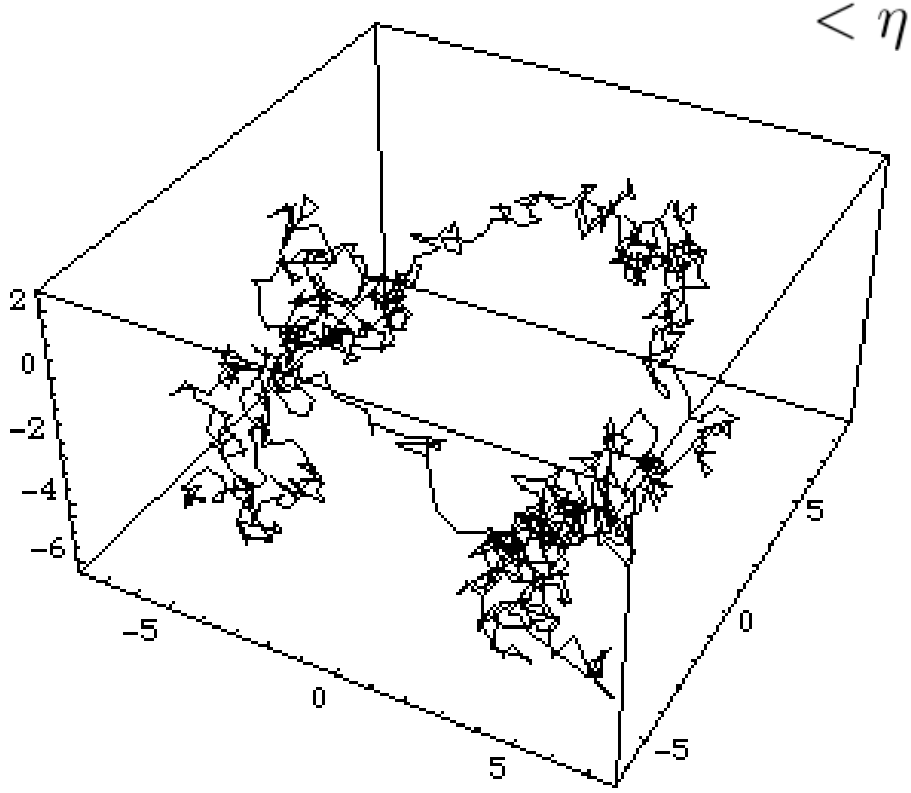
State $n = 3$, $l = m = n$-1

Process:

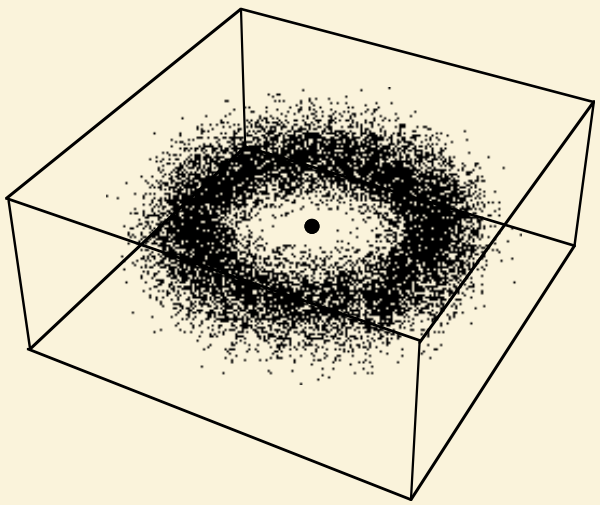
$$dx = v_+ dt + \eta\sqrt{2\mathcal{D}dt}$$

$$v_+ = U + V \qquad \mathcal{V} = V - iU$$

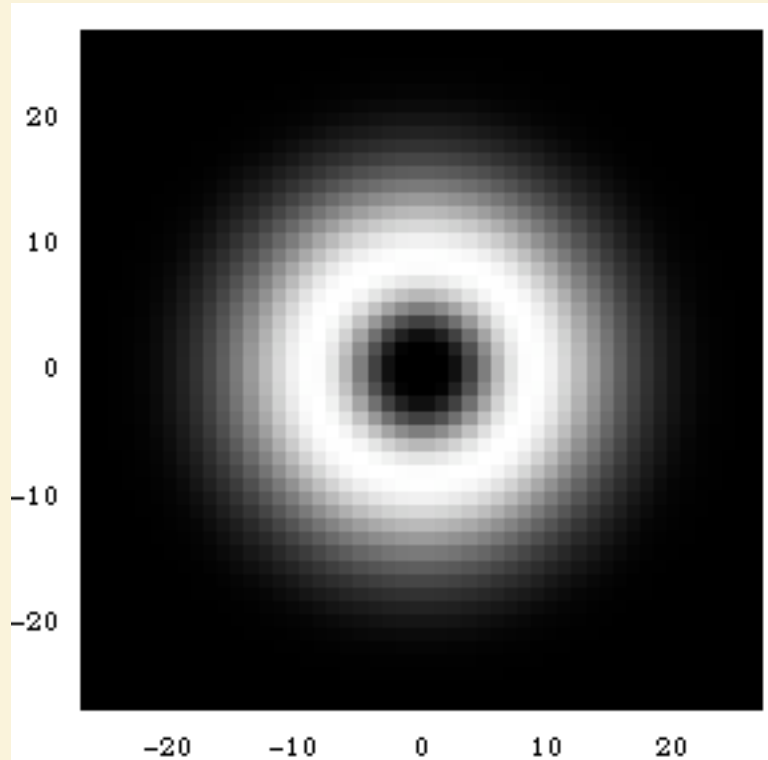
$$< \eta >= 0, \quad < \eta^2 >= 1$$



# Solutions: Kepler potential



n=3




Generalized Laguerre polynomials

# Solutions (potentiel Képlerien): pics de proba

$$\mathcal{D} = \frac{GM}{2w_0} \qquad 4\pi^2 a^3 = GM\,P^2$$ (3è loi Kepler)

Pic de probabilité, vitesse: $$v_n = \frac{2\pi a_n}{P_n} = \left(\frac{GM}{a_n}\right)^{1/2} = \frac{w_0}{n}$$

Energie: $$\frac{E_n}{m} = -\frac{G^2M^2m}{8\mathcal{D}^2n^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{n}\right)^2$$

Demi-grands axes, périodes (pic): $$\boxed{a_n = \frac{GM}{w_0^2}\,n^2} \qquad P_n = \frac{2\pi GM}{v_n^3} = \frac{2\pi GM}{w_0^3}\,n^3$$

Moyenne: $n^2+n/2$ (conservation centre gravité) --> PSR1257

Périhélies ($e$ = 1): $$q_\ell = \left(\frac{GM}{w_0^2}\right)\frac{\ell(\ell+1)}{2}$$

Excentricités (vecteur de Lenz, parabolique): $$\boxed{e = \frac{k}{n}, \quad (k = 0, \ldots, n-1)}$$

# Prédiction théorique antérieure aux découvertes (exoplanètes, ceinture de Kuiper):

L.N., (1993), Fractal Space Time and Microphysics, World Scientific

« We can expect other [planetary] systems to be discovered in the forthcoming years, and new informations to be obtained about the very distant solar system (Kuiper's belt, Oort cometary cloud...). In this regard our theory is a falsifiable one, since it makes definite predictions about such observations of the near future: observables such as the distribution of eccentricities, mass, angular momentum, the preferred positions of planets and asteroids, or possibly the ratio of distance of the largest gazeous planet and the largest telluric one, are expected in our framework to be universal structures shared by any planetary system.»

L.N., (1994) in *Chaos and Diffusion in Hamiltonian Systems*, (Chamonix, Février 1994), D. Benest and C. Froeschlé Eds., Frontières, p. 173

# Comparaison aux données d'observation:

## Système solaire
## et
## exoplanètes autour d'étoiles de type solaire

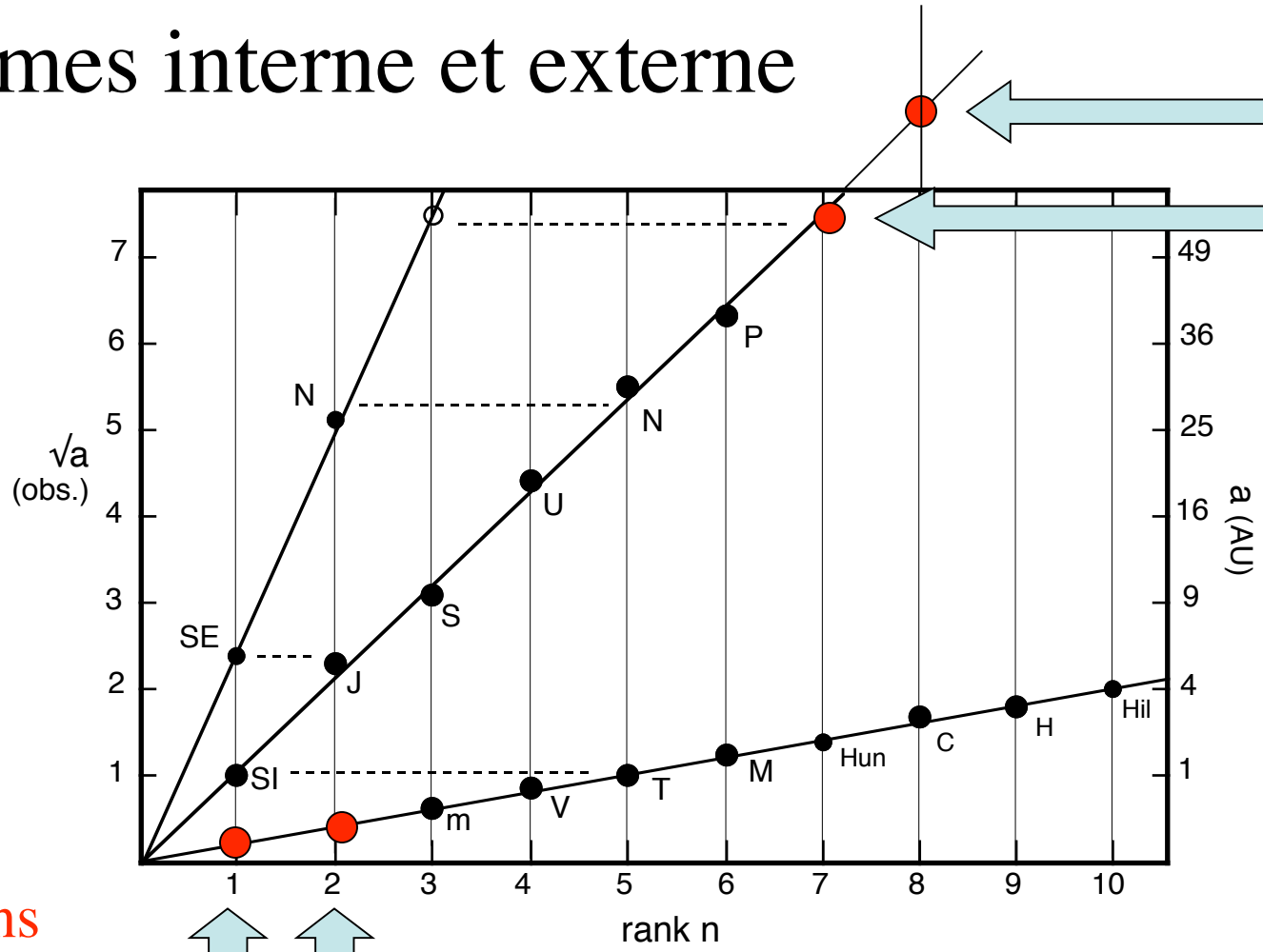
Nottale, L., 1996, Astron. Astrophys. Lett. 315, L9
Nottale, L., Schumacher, G., Gay, J., 1997, Astron. Astrophys. 322, 1018
Nottale, L., Schumacher, G., Lefèvre, E.T., 2000, Astron. Astrophys. 361, 379

# Système solaire :
## systèmes interne et externe

Kuiper belt

70 UA

55 UA




Predictions
(1992)

0.043 UA/$M_{sol}$

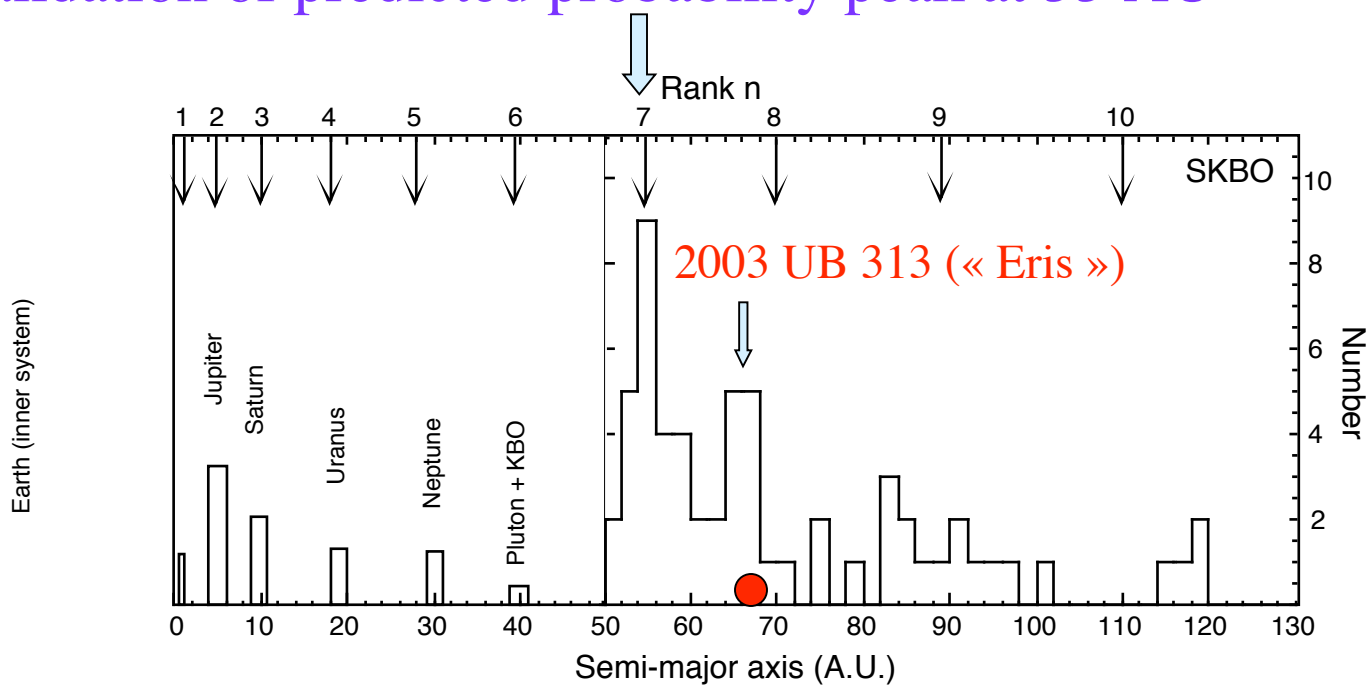
0.17 UA/$M_{sol}$

--> Exoplanètes

Ref: Nottale 1993, Fractal Space-Time and Microphysics (World Scientific)

# Outer Solar System:
## Kuiper belt (SKBOs)

Validation of predicted probability peak at 55 AU




$$a_n = \frac{GM}{v_n^2} = \frac{GM}{w_0^2} n^2$$

Ref: Da Rocha Nottale 03 CSF16, 565 (arXiv: astro-ph/0310036)

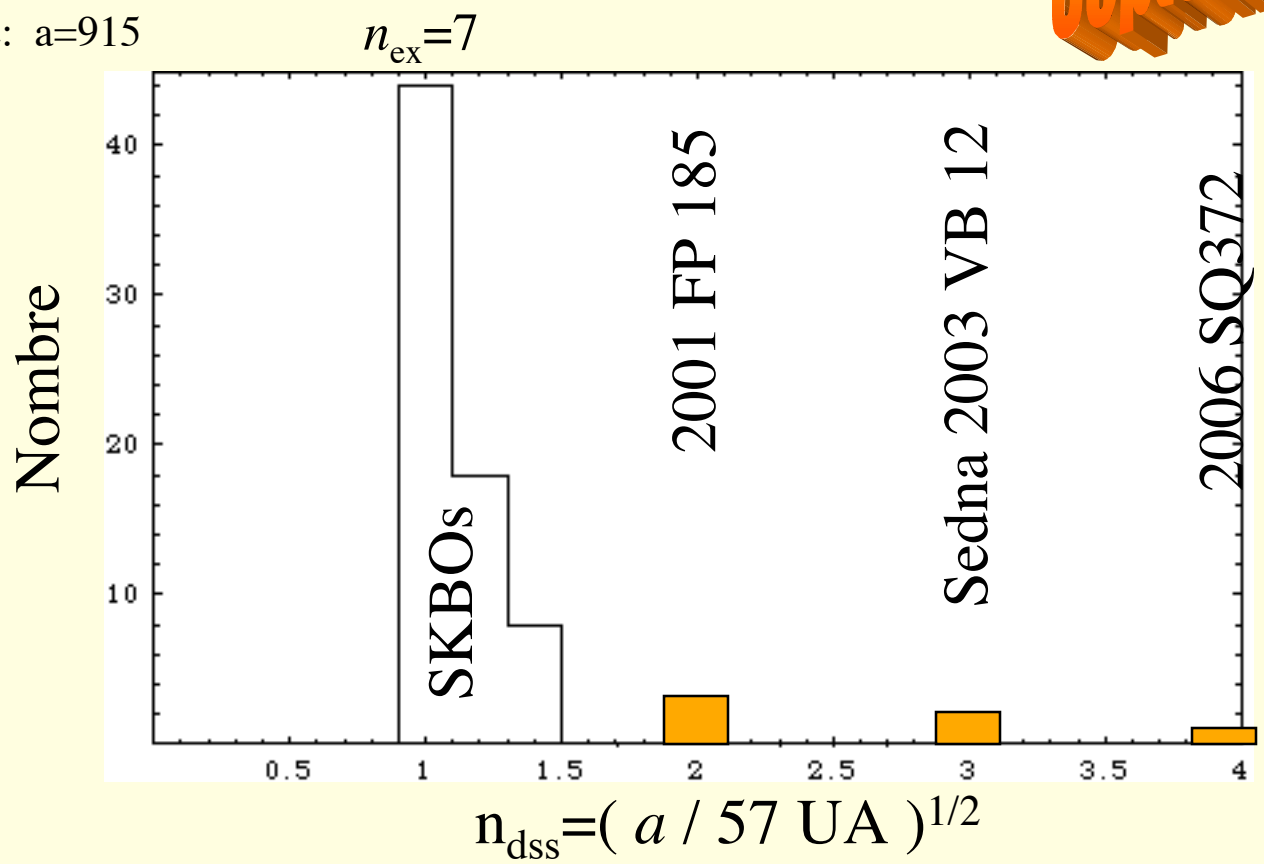
$$w_0 = 29 \text{ km/s} = (144/5) \text{ km/s}$$

2002 GB 32: a=219
2000 CR 105: a=222
2001 FP 185: a=228
2003 VB 12: a=495
2000 OO 67: a=517
2006 SQ372: a=915

Galopeau et al, 2004, in ``Scientific Highlights SF2A 2004, EDP Sciences, p. 75-76

# Sedna +…

Septembre 2005

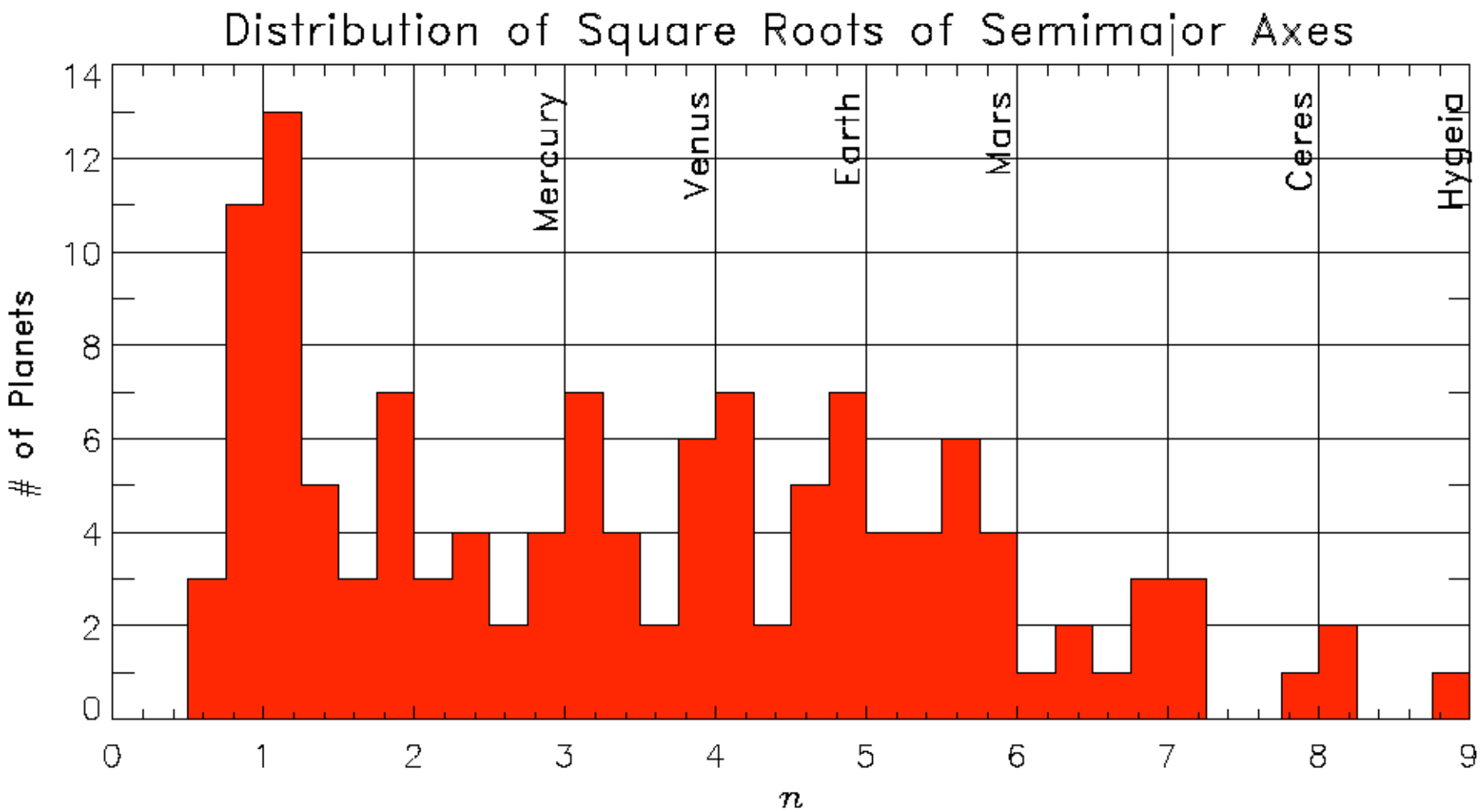



Confirmation:
2 nouveaux objets en n=2,
1 nouvel objet en n=3

Juin 2007

| Prédit,UA | (57) | 228 | 513 | 912 | 1425 | 2052 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Observé | 57 | 227 | 509 | 915 | | |

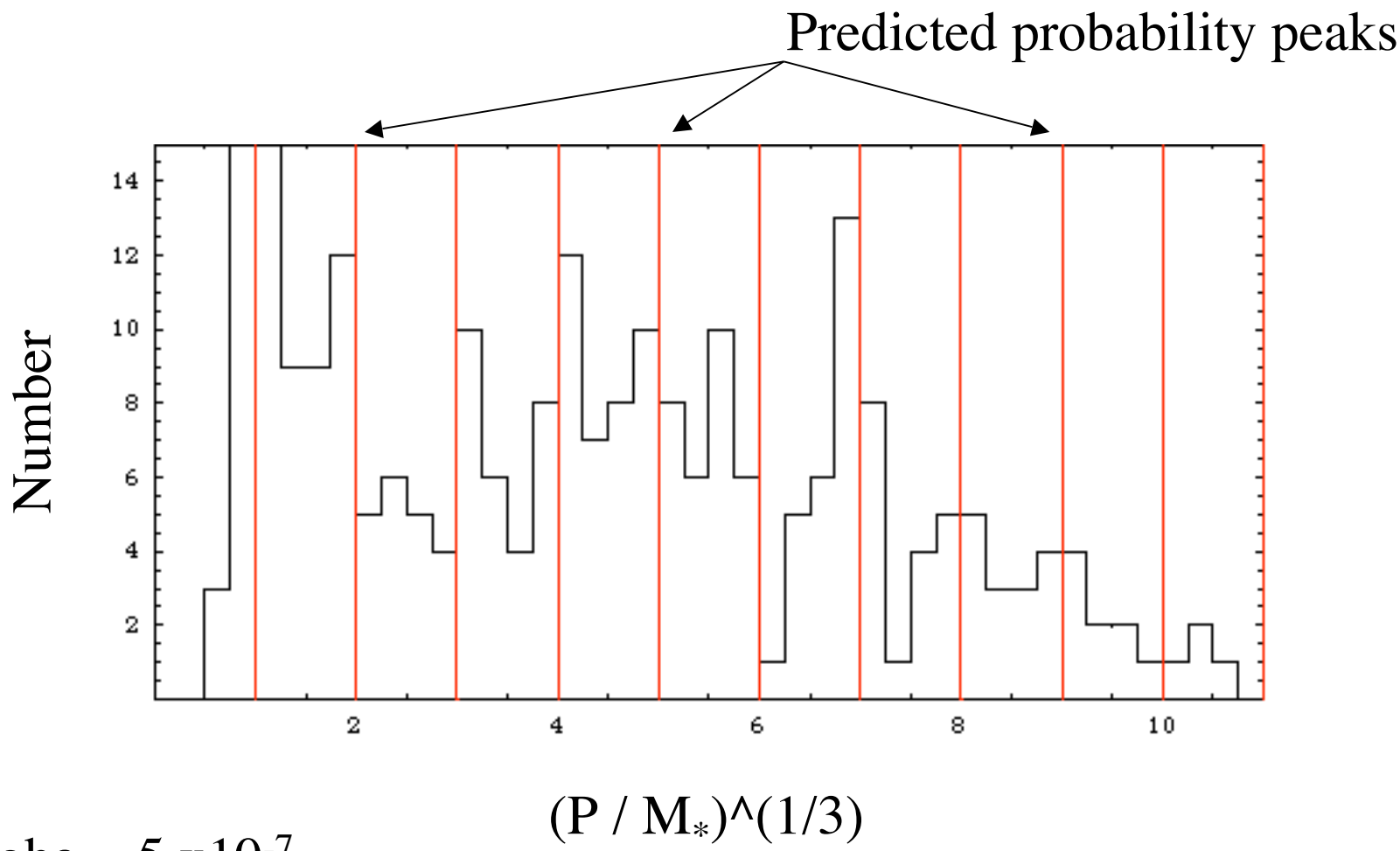
# Exoplanets (data 2006)




(P / $M_*$)^(1/3)

# Exoplanets (data 2008, N=301)

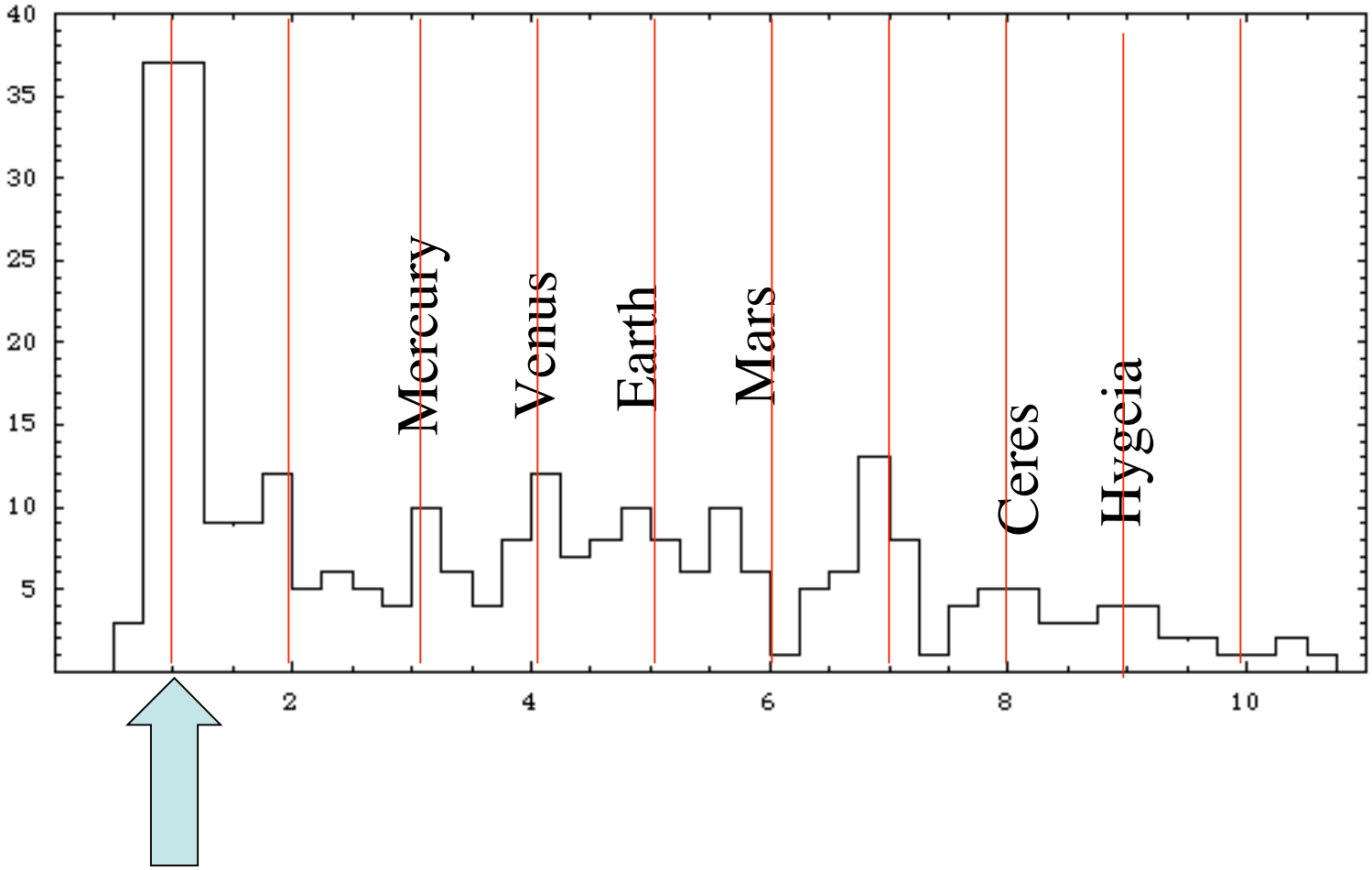
(main peak cut)




Proba = 5 x$10^{-7}$

# Exoplanets (data 2008, N=301)

Main peak




Predicted (1993) fundamental level, 0.043 AU/ $M_{sol}$

Avril 2004

# Exoplanètes à 0.02 UA/$M_{sol}$

Validation prédiction théorique d'une nouvelle sous-structure à base

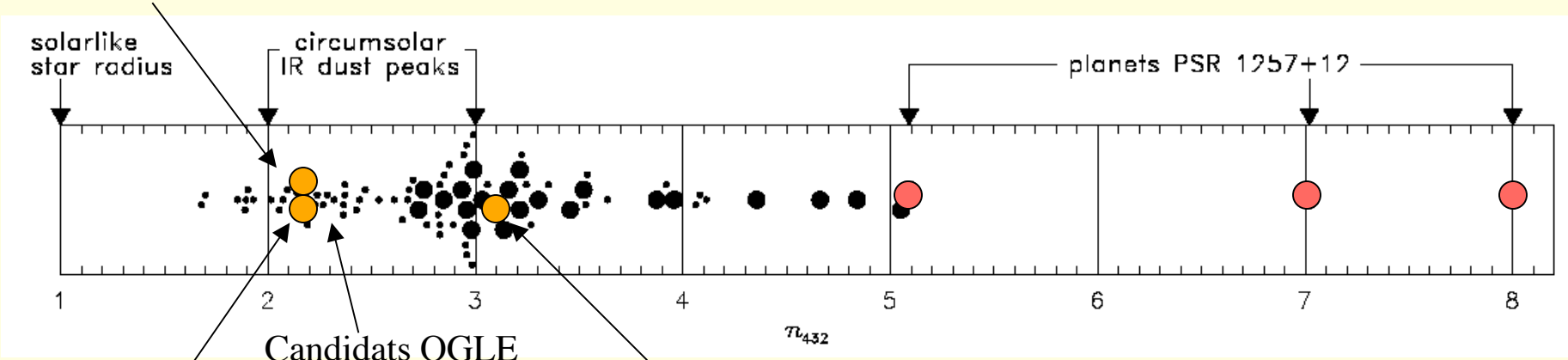
$w_0 = 432$ km/s

(vitesse keplerienne au rayon des étoiles de type solaire)

*Ref: Nottale, Schumacher et Lefèvre, 2000, A&A 361, 379*

$n_{432} = 2 \longrightarrow a/M = 0.02$ UA/$M_{sol}$

OGLE-TR-56




Candidats OGLE

HD 330075: première détection HARPS (Mayor et al)

OGLE-TR-132: exoplanète confirmée (Bouchy et al)

# Planètes autour du pulsar PSR B1257+12

# PSR B1257+12

*Découvert par Wolszczan (1990): $P_{rot}$=6.218 531 938 028 3(2) ms

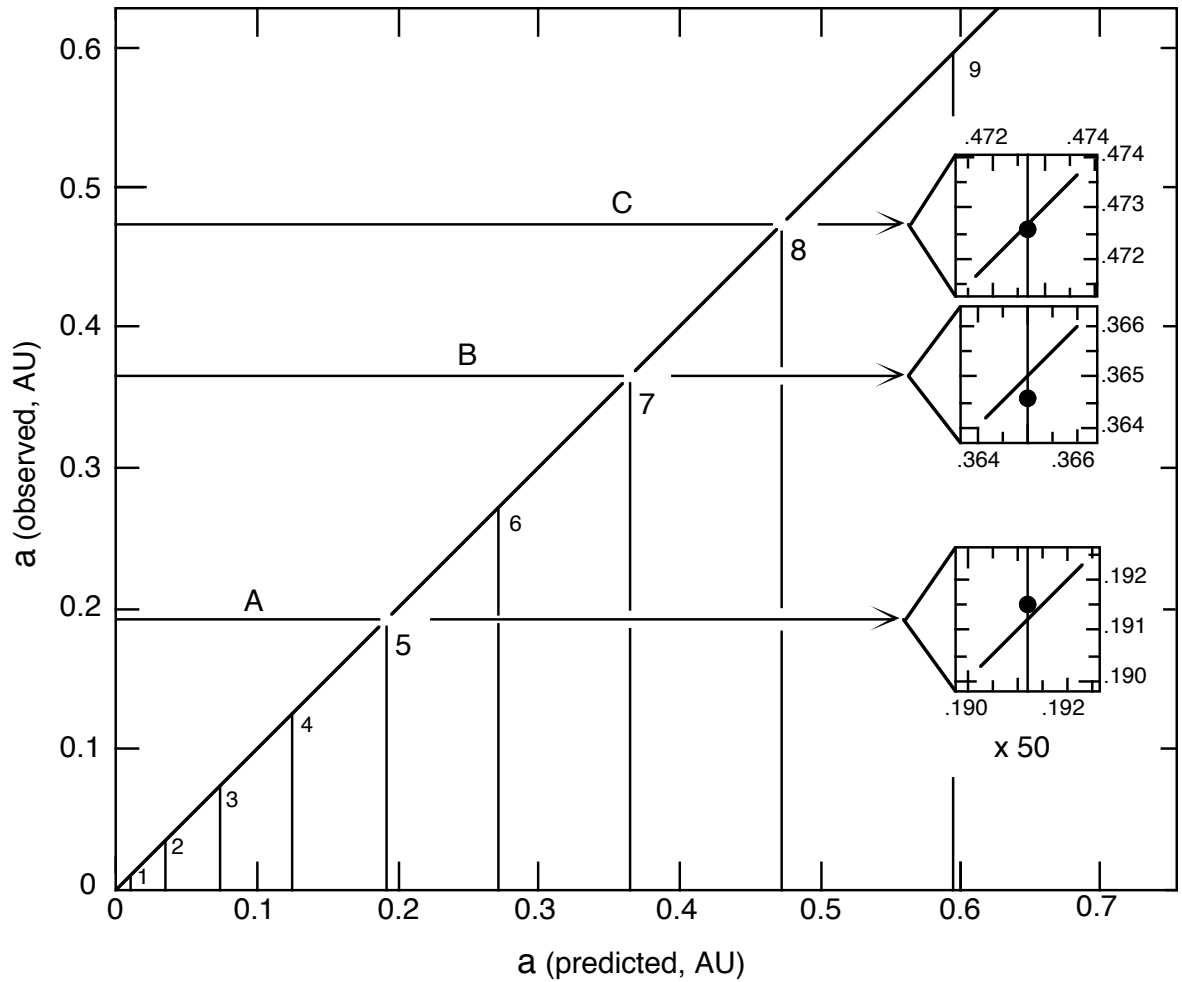
*Premières planètes extrasolaires (Wolszczan et Frail 1992)
(*B*: 3.4 $M_T$, *P*=66.5 j; *C*: 2.8 $M_T$, *P*=98.2 j)

*Confirmation: perturbation gravitationnelle mutuelle des orbites
(planètes B et C en quasi-résonance 3:2) (Wolszczan 1994)

*Troisième planète (Wolszczan 1994)
(*A*: 0.015 $M_T$, *P*=25.3 j)

*Confirmation 3è planète (Wolszczan et al 2000)

# Comparaison prédictions-observations



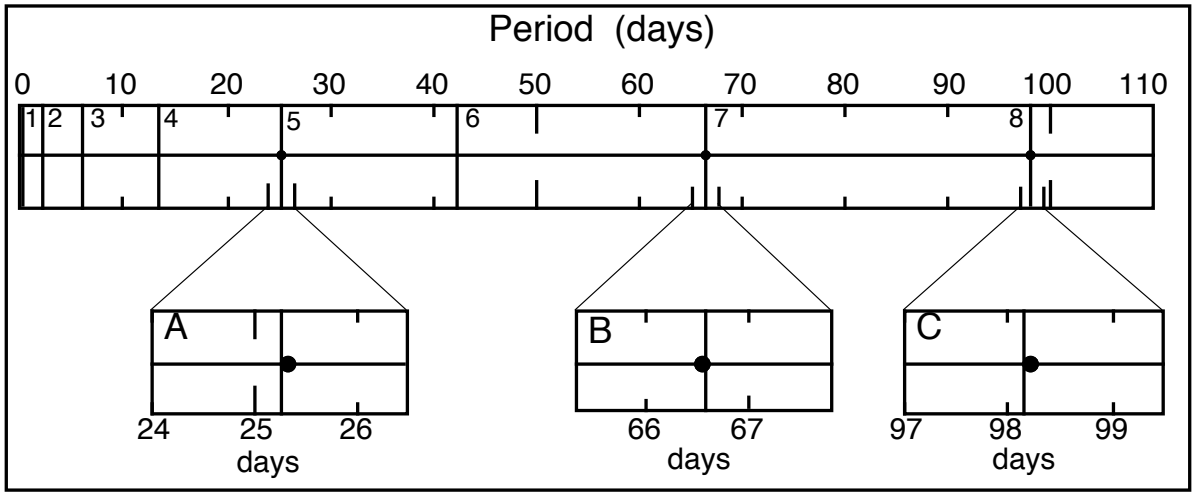

Nottale L., 1996, A&A Lett. 315, L9

1998, CSF, 9, 1043 (http://luth.obspm.fr/~luthier/nottale/arPSR.pdf)

2006: http://lpce.cnrs-orleans.fr/~pulsar/PSRworkshop/Talks/L.Nottale.ppt

# Systèmes extra-solaires:
## PSR B1257+12

$$P_n = (2\pi G M_{psr}/w^3)(n^2 + n/2)^{3/2}$$




Données:
Wolszczan 94, 00

$M_{psr}$ =1.4 ± 0.1 $M_{sol}$ --> $w$ = (2.96 ± 0.07) x 144 km/s, i.e. 432 km/s = vitesse keplerienne en $R_{sol}$
Proba < $10^{-5}$ d'obtenir un tel accord par hasard

Prédiction d'autres orbites: $P_1$=0.322 j, $P_2$=1.958 j, $P_3$=5.96 j

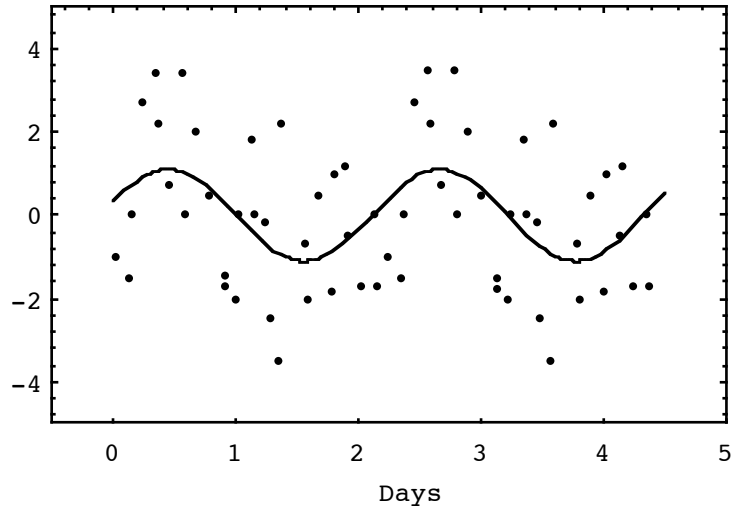
⇓

Résidus données Wolszczan 00: P = 2.2 j (2.7 σ)



Refs: Nottale 96, 98, Da Rocha & Nottale 03

# Analyse des résidus données Wolszczan 99




```
PSR 1257+12, donnees Wolszczan 1999
Analyse residus post correction de A,B,C
Meilleur fit:
Periode: 2.22 jours
Amplitude 1.1 microseconde
Signification statistique: 2.7 sigma
Periode predite: n=2: 1.96 jours
```

Marginal: à confirmer par de nouvelles observations…
--> Nançay /I. Cognard + Wolszczan ?


Ref.: Nottale L., 2006, in "Workshop Pulsars, Théories et Observations", 16 et 17 Janvier 2006, Institut d'Astrophysique de Paris.
"Structure du système planétaire autour de PSR1257+12"
http://lpce.cnrs-orleans.fr/~pulsar/PSRworkshop/Talks/L.Nottale.ppt

# Nouvelle analyse 2007-2008

Eléments nouveaux:

-Amélioration de la détermination des éléments orbitaux:
*(Konacki, Wolszczan 2003)*

-Analyse numérique de la dynamique à long terme du système:
*(Gozdziewski, Konacki, Wolszczan 2005)* Intégration numérique directe sur 1 Gyr --> stabilité à long terme:Planètes B et C fortement couplées, proches d'une résonance 3:2
Système très proche d'un mouvement quasi périodique

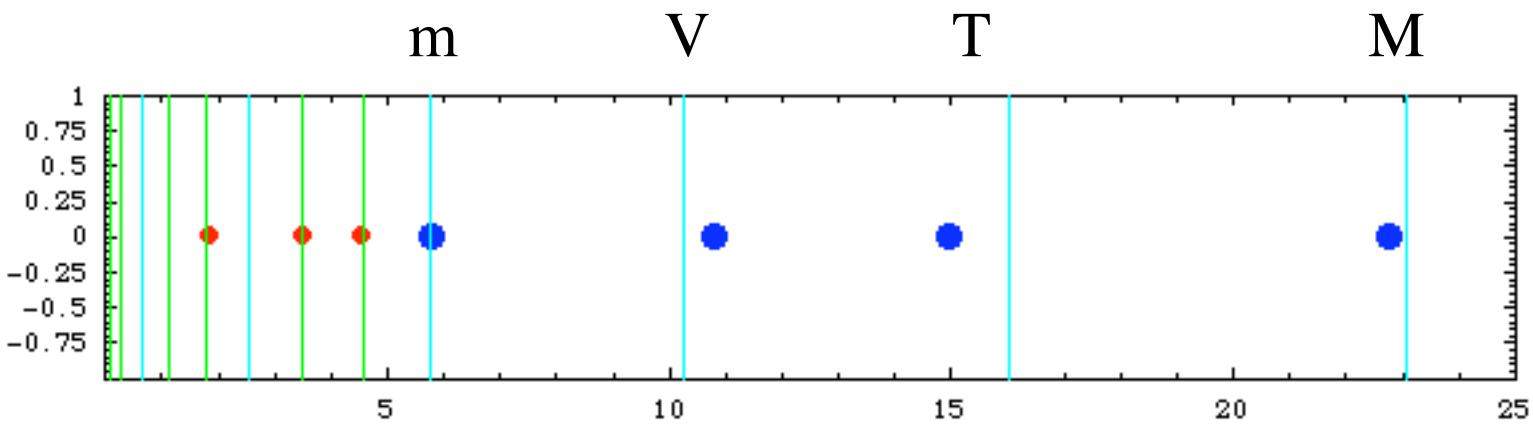
→ Reprise de l'analyse LN:
-Formation du système: Schrödinger macroscopique / RE: amélioration du modèle (héliumoïde)
-Transition macroquantique --> classique (paquets d'onde coulombiens): en cours
-Evolution (mécanique classique): solutions exactes

# PSR B1257+12 planets: improved orbital elements

| Orbital Elements | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Orbital Period (d) | 25.262(3) | 66.5419(1) | 98.2124(2) |
| Eccentricity | 0.0 | 0.0186(2) | 0.0252(2) |
| Mass ($M_T$) | 0.020(2) | 4.3(2) | 3.9(2) |

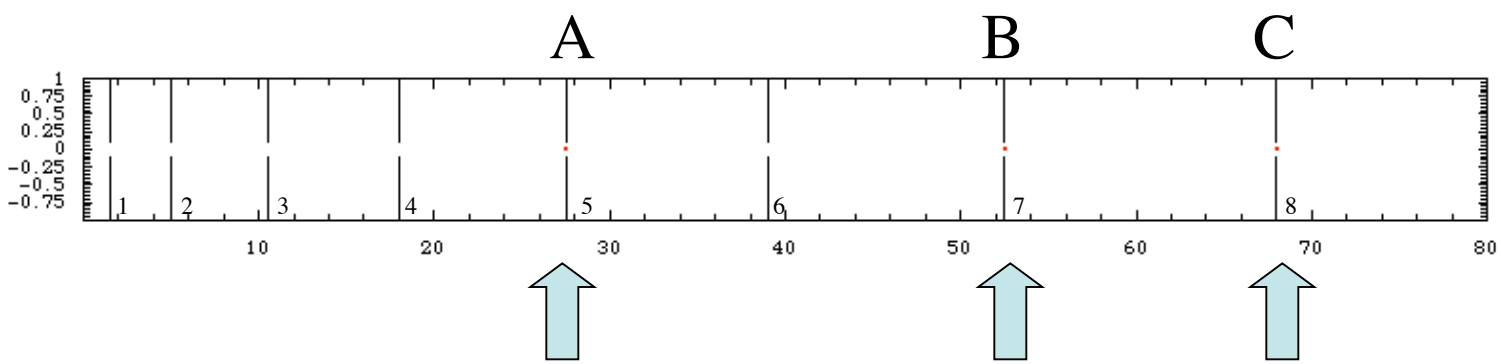
Konacki Wolszczan 2003 ApJ 591, L147

# Comparaison au système solaire interne




Distance à l'étoile, normalisée par sa masse ($M_{PSR}$=1.5 $M_{sol}$).
Loi en n^2

# Nouvelle comparaison à la prédiction RE




Base: planète C : $a_C = 68$, $n_C = 8$

Planète A: $(a_A)^{pred} = 27.5$ <--> $(a_A)^{obs} = 27.503 \pm 0.002$

$(n_A)^{pred} = 5$ <--> $(n_A)^{obs} = 5.00028 \pm 0.00020$

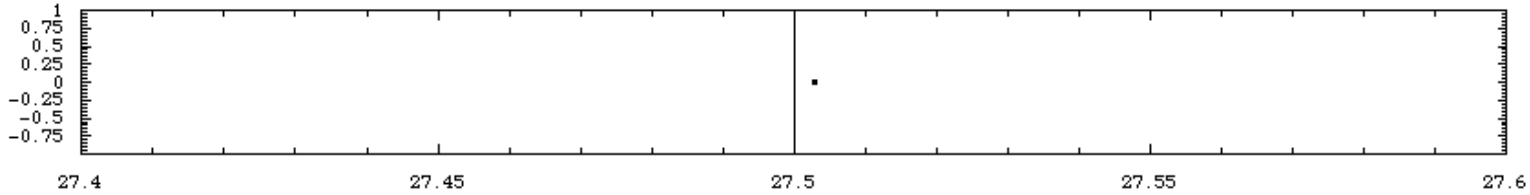
$\delta n_A/n_A = 5 \times 10^{-5}$ *Amélioration d'un facteur 12 !*

Planète B: $(a_B)^{pred} = 52.5$ <--> $(a_B)^{obs} = 52.4563 \pm 0.0001$

$(n_B)^{pred} = 7$ <--> $(n_B)^{obs} = 6.997 \pm 0.00001$

*Même écart* ($4 \times 10^{-4}$)--> *recherche d'amélioration du modèle…*

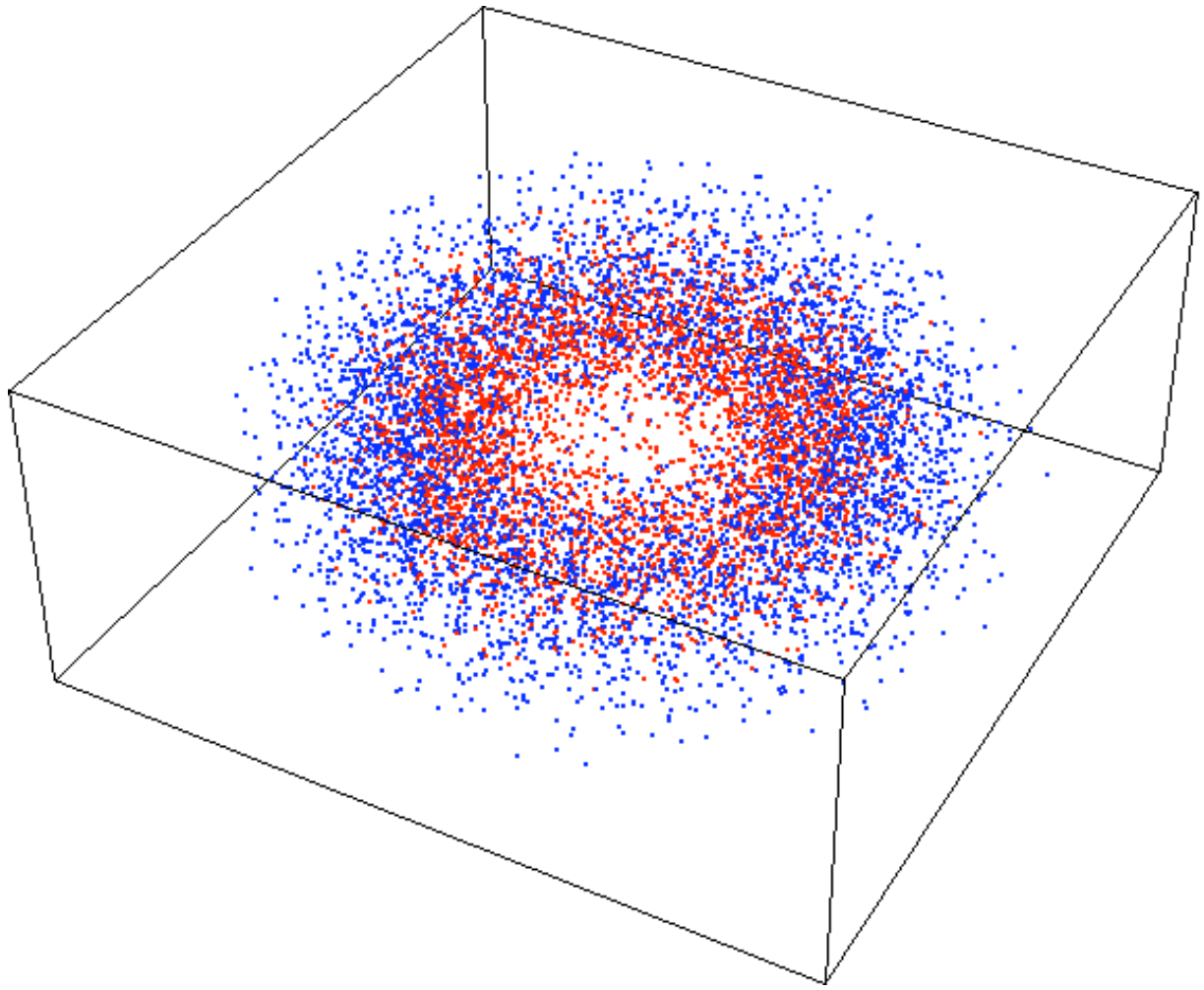
# Zoom facteur 1000 sur orbite planète A



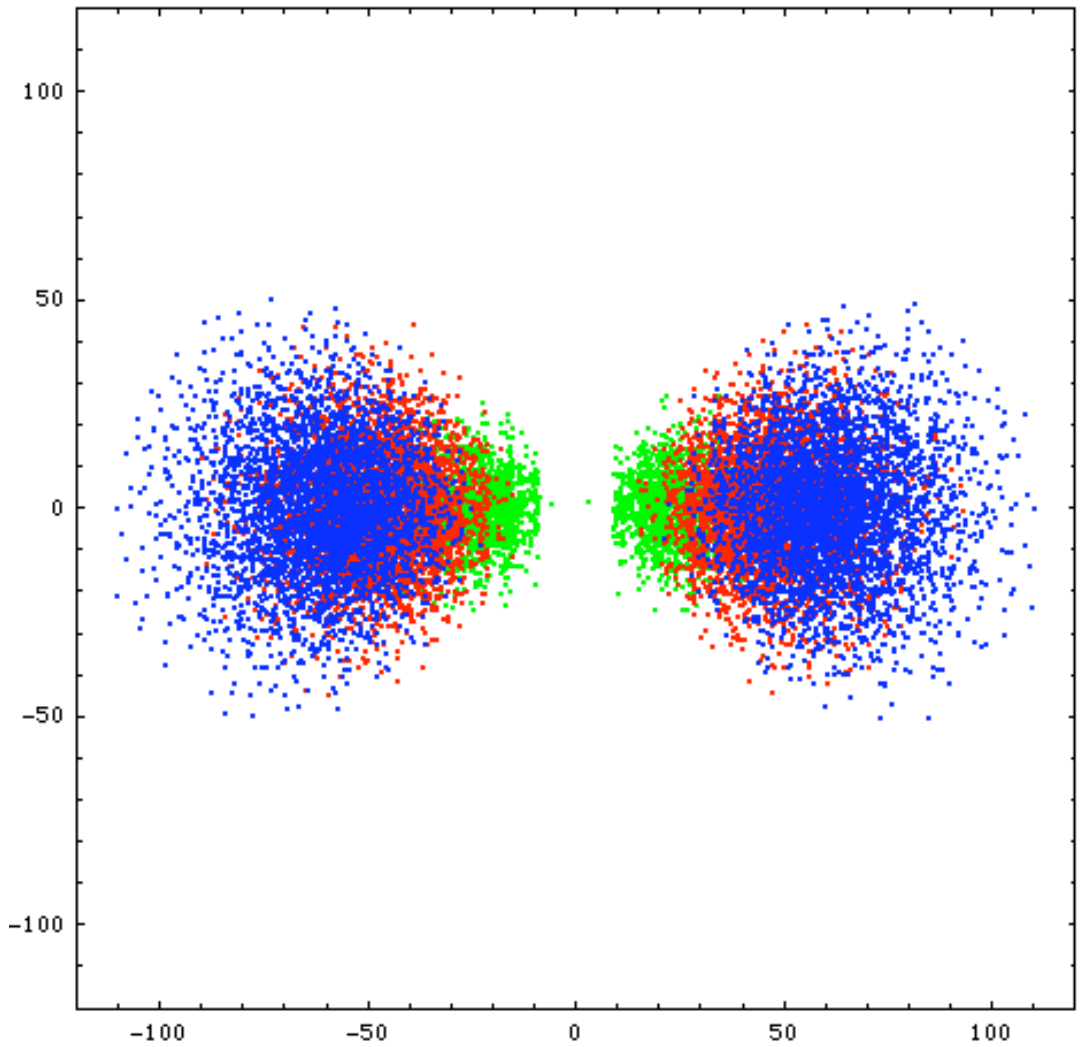

Ecart relatif $\delta n_A/n_A = 5 \times 10^{-5}$

A une échelle de représentation où A, B, C seraient à 27.5, 52.5 et 68 m, écart 3 mm pour A ! et 4.5 cm pour B (C fixée)

# Sous-disques B ($n$ = 7) et C ($n$ = 8)



# Section du disque



# Modèle de formation « héliumoïde »

Disque de planétésimaux formé de 2 sous-disques [B] et [C]

$$\hat{H} = \sum_{B,C} \left( -\frac{\tilde{\hbar}^2}{2\mu}\Delta - \frac{M\mu}{r} - \sum_{B} \frac{\mu^2}{r_{12}} - \sum_{C} \frac{\mu^2}{r_{12}} - \sum_{BC} \frac{\mu^2}{r_{12}} \right)$$

$$\tilde{\hbar} = 2\mu\mathcal{D}, \text{ with } \mathcal{D} = GM/2w_0$$

Prise en compte des auto-potentiels et de l'interaction:

$$E_{\text{tot}} = -\frac{1}{2}\, w_0^2 \left( \frac{m_B}{n_B^2} + \frac{m_C}{n_C^2} + \frac{2m_B^2}{M}\, I_{BB} + \frac{2m_C^2}{M}\, I_{CC} + \frac{2m_B m_C}{M}\, I_{BC} \right)$$

$$I_{BB} = \int_B \frac{|\psi_{B1}|^2 |\psi_{B2}|^2}{r_{12}}\, dV_1 dV_2 \qquad I_{CC} = \int_C \frac{|\psi_{C1}|^2 |\psi_{C2}|^2}{r_{12}}\, dV_1 dV_2 \qquad I_{BC} = \int_{BC} \frac{|\psi_{B1}|^2 |\psi_{C2}|^2}{r_{12}}\, dV_1 dV_2$$

Integration numérique:

$$I_{77} = 0.0173582,\ I_{88} = 0.0134383,\ I_{78} = 0.0221588,\ I_{57} = 0.0377702,\ I_{58} = 0.0307991$$

# Résultat

$m_B/M_{PSR} \approx 10^{-5}$ et $m_C/M_{PSR} \approx 10^{-5}$

| | |
|---|---|
| $\delta n_A = -0.000052$ | $(n_A)^{pred} = 5.000012$ |
| $\delta n_B = -0.000090$ | $(n_B)^{pred} = 7.000000$ |
| $\delta n_B = -0.000102$ | $(n_C)^{pred} = 8.000000$ |

- Négligeable à la précision actuelle

- Deviendrait significatif si la prédiction théorique atteignait la précision observationnelle de B et C

# Evolution (classique)

(de la fin de la période de formationà l'époque actuelle)

Prise en compte de la quasi-résonance 3:2 de B et C:
$(P_C/P_B) \approx (n_C/n_B)^3 = (8/7)^3 = 1.4927$

Equations d'un tel problème à 3 corps:
Malhotra 1993 ApJ 407, 266 (Lagrange-Laplace / Brouwer & Clemence 1961)

Conjonction (kick)

$$\mathcal{H}' = -\frac{Gm_1m_2}{a_2}\left\{[P(\psi,\alpha) - \alpha\cos\psi] + \frac{1}{2}A_1(\alpha)(e_1^2+e_2^2)\right.$$
$$\left. -A_2(\alpha)e_1e_2\cos(\omega_1-\omega_2) + C_1(\alpha)e_1\cos(\phi-\omega_1) + C_2(\alpha)e_2\cos(\phi-\omega_2)\right\},$$

Precession

Near resonance

(En termes d'éléments orbitaux osculateurs)

avec

$$
\begin{aligned}
\alpha &= a_1/a_2, \\
\psi &= \lambda_1 - \lambda_2, \\
\phi &= 3\lambda_2 - 2\lambda_1, \\
P(\psi,\alpha) &= (1 - 2\alpha\cos\psi + \alpha^2)^{-1/2}, \\
A_1(\alpha) &= +\frac{1}{4}\,\alpha\, b^{(1)}_{3/2}(\alpha) = +2.50, \\
A_2(\alpha) &= -\frac{1}{4}\,\alpha\, b^{(2)}_{3/2}(\alpha) = -2.19, \\
C_1(\alpha) &= -\frac{1}{2}\left(6 + \alpha\frac{d}{d\alpha}\right)\, b^{(3)}_{1/2}(\alpha) = -2.13, \\
C_2(\alpha) &= +\frac{1}{2}\left(5 + \alpha\frac{d}{d\alpha}\right)\, b^{(2)}_{1/2}(\alpha) = +2.59,
\end{aligned}
$$

# Equations des demi-grands axes:

$$\frac{\dot{a_1}}{a_1} = +2\,\frac{m_2}{M_*}\,n_1\alpha\left[\frac{\partial}{\partial\psi}P(\psi,\alpha) + \alpha\sin\psi + 2C_1(\alpha)e_1\sin(\phi-\omega_1) + 2C_2(\alpha)e_2\sin(\phi-\omega_2)\right] \tag{15}$$

$$\frac{\dot{a_2}}{a_2} = -2\,\frac{m_1}{M_*}\,n_2\alpha\left[\frac{\partial}{\partial\psi}P(\psi,\alpha) + \alpha\sin\psi + 3C_1(\alpha)e_1\sin(\phi-\omega_1) + 3C_2(\alpha)e_2\sin(\phi-\omega_2)\right] \tag{16}$$

$n = 2\pi/P$

# Equations des excentricités et périhélies:

$$h_j = e_j\sin\omega_j, \quad k_j = e_j\cos\omega_j,$$

$$\mu_1 = \frac{m_1}{M_*}, \quad \mu_2 = \frac{m_2}{M_*},$$

$$\dot{h_1} = A_{11}k_1 + A_{12}k_2 + B_1\cos\phi,$$
$$\dot{h_2} = A_{21}k_1 + A_{22}k_2 + B_2\cos\phi,$$
$$\dot{k_1} = -A_{11}h_1 - A_{12}h_2 - B_1\sin\phi,$$
$$\dot{k_2} = -A_{21}h_1 - A_{22}h_2 - B_2\sin\phi,$$

$$A_{11} = \mu_2\,n_1\alpha\,A_1(\alpha), \quad A_{12} = \mu_2\,n_1\alpha\,A_2(\alpha),$$
$$A_{21} = \mu_1\,n_2A_2(\alpha), \quad A_{22} = \mu_1\,n_2A_1(\alpha),$$
$$B_1 = \mu_2\,n_1\alpha\,C_1(\alpha), \quad B_2 = \mu_1\,n_2C_2(\alpha).$$

$A_1$=2.50 $A_2$= -2.19 $C_1$=-2.13 $C_2$=2.59

# Solution: intégrales premières

Rasio et al 93: solution approchée (planète B = particule test sans masse, planète C: orbite keplerienne non perturbée $n_1 = n_*(1 + 3\,e_1^2)$

Ici, solution complète. Demi-grands axes:

$$\boxed{3m_1\,a_1^{1/2} + 2m_2\,a_2^{1/2} = Q_a}$$ = cste

--> orbites fortement couplées et en opposition

Excentricités:

Superposition d'oscillations libres [périodes ≈ 6200 ans et ≈ 92000 ans], amplitude 50%, et d'oscillations forcées [période $2\pi/(3n_2\text{-}2n_1) \approx 5.586$ ans]

$$\boxed{m_1\,a_1^{1/2}\,e_1^2 + m_2\,a_2^{1/2}\,e_2^2 = Q_e},$$ = cste (long terme seul)

--> les excentricités oscillent fortement sur le long terme en exacte opposition.
Confirme integration numérique de Gozdziewski Konacki Wolszczan 2005

# Relation *a* - *e* . 1.

$$\dot{a}_1 = +2\,\mu_2\,n_1 a_1 \alpha(\Gamma_k - 2\Gamma),$$
$$\dot{a}_2 = -2\,\mu_1\,n_2 a_2(\Gamma_k - 3\Gamma).$$

$$\Gamma_k = \frac{\partial}{\partial\psi}P(\psi,\alpha) + \alpha\sin\psi$$

(terme de conjonction)

$$\Gamma = C_1(\alpha)e_1\sin(\phi-\omega_1) + C_2(\alpha)e_2\sin(\phi-\omega_2)$$

(Dépendance des excentricités)

On trouve:

$$\Gamma = \frac{e_1\dot{e}_1}{\mu_2 n_1\alpha} + \frac{e_2\dot{e}_2}{\mu_1 n_2}$$

$$S\Gamma = \int \Gamma(t)dt = \frac{1}{2\mu_2 n_1\alpha}(e_1^2 + K e_2^2)$$

Où on a posé:

$$K = \frac{m_2}{m_1}\alpha^{-1/2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\alpha^{-1/2}$$

--> $K_{PSR}$=1.03 ± 0.10

On reconnaît l'intégrale première de long terme précédente

# Relation *a* - *e* . 2.

Solution (sans la contribution de conjonction - très court terme):

$$\frac{\dot{a}_1}{a_1} = -4(e_1\dot{e}_1 + Ke_2\dot{e}_2)$$

$$\frac{\dot{a}_2}{a_2} = 6\mu_1 n_2 \Gamma(t) = \frac{6}{K}(e_1\dot{e}_1 + Ke_2\dot{e}_2)$$

$$\frac{a_1}{a_{1*}} = 1 - 2(e_1^2 + Ke_2^2)$$

$$\frac{a_2}{a_{2*}} = 1 + \frac{3}{K}(e_1^2 + Ke_2^2)$$

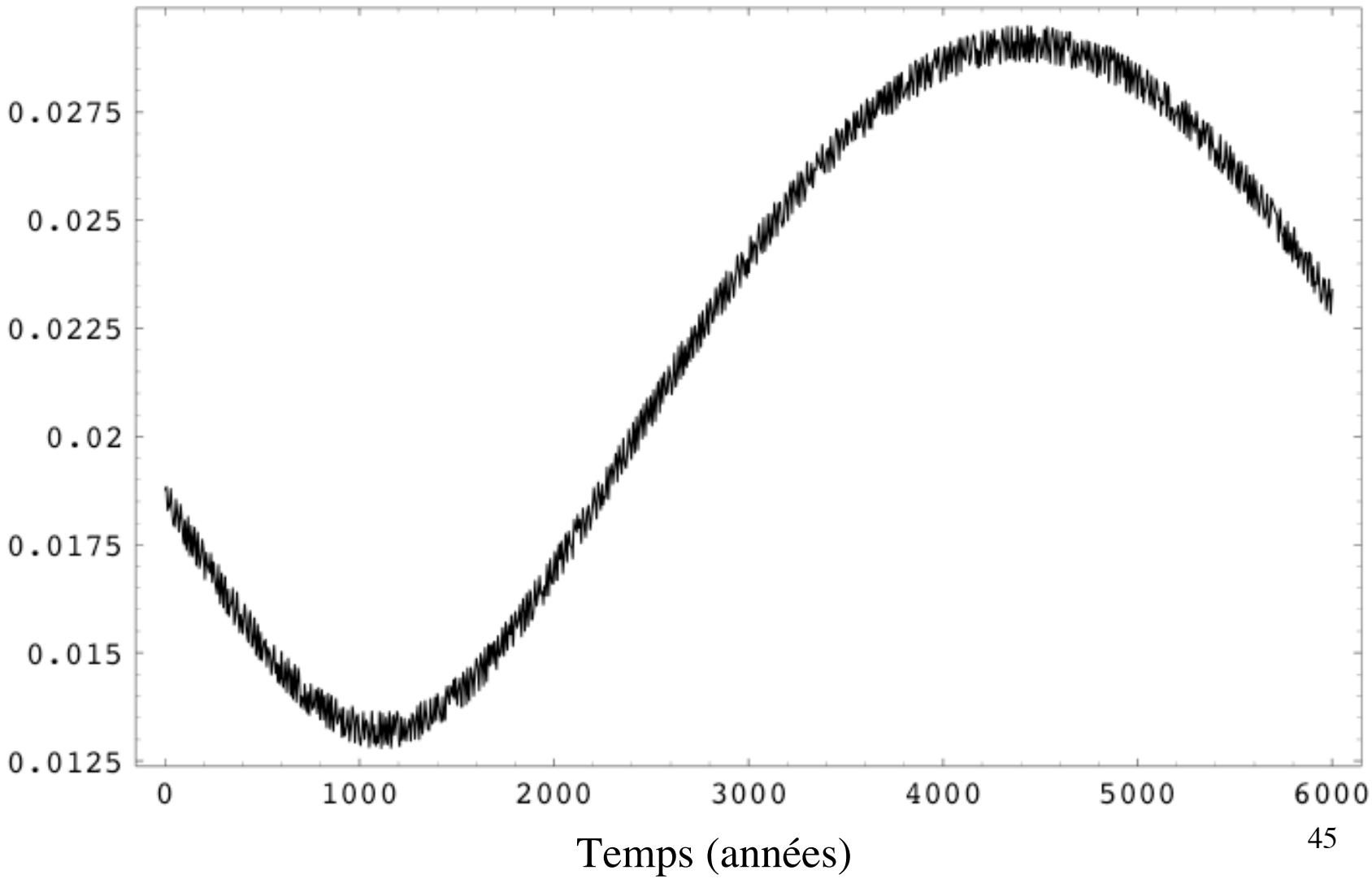
Donné par l'intégrale première de long terme

→ démontre la stabilité complète des demi-grands axes sur le long terme: confirmation de l'intégration numérique de GKW05 (ApJ 619, 1084)

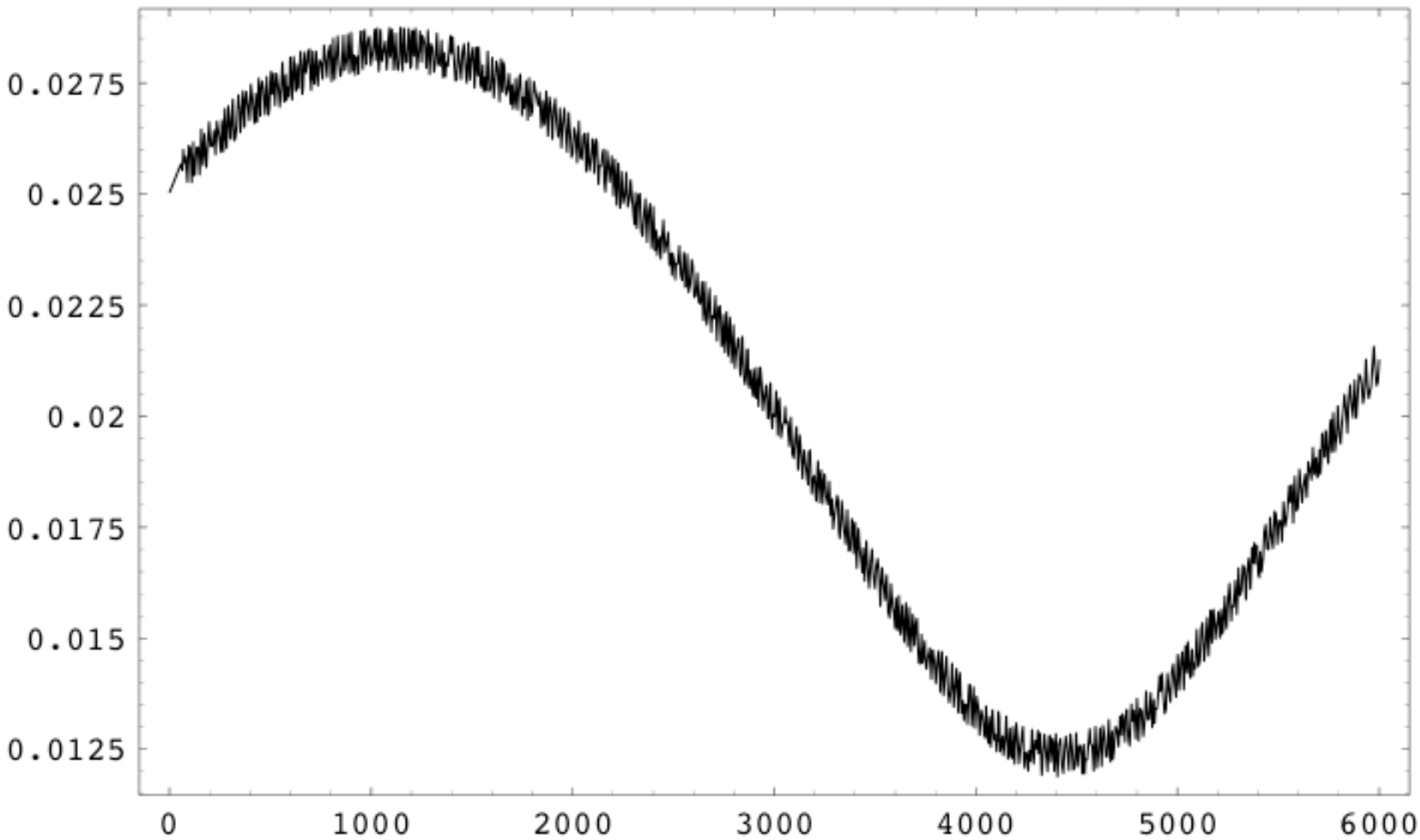
Seule variation: termes de conjonction.

Valide l'application de la prédiction TRE (formation) aux données d'observation actuelles

# Résultat analytique: $e_B$

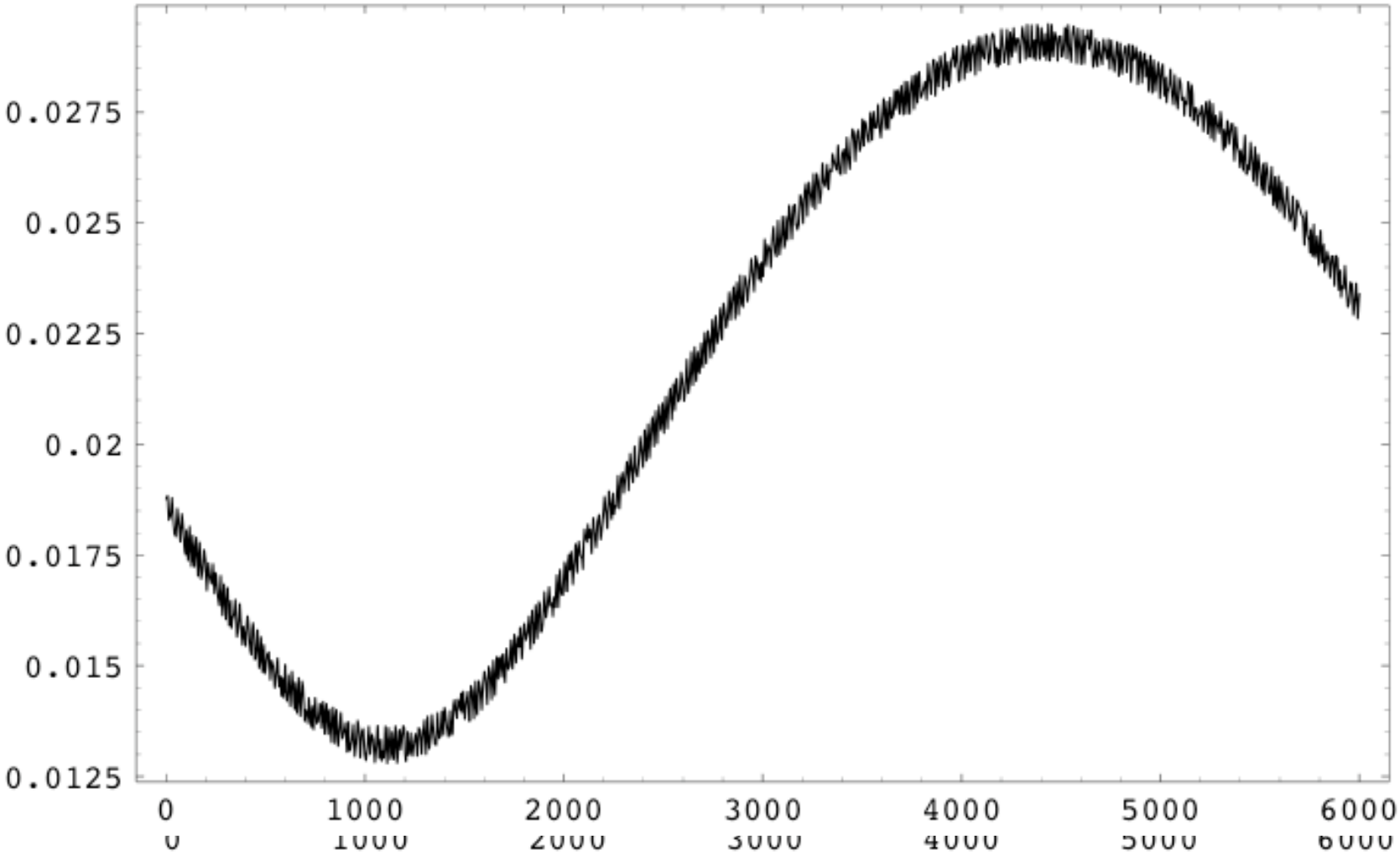


# Résultat analytique: $e_C$



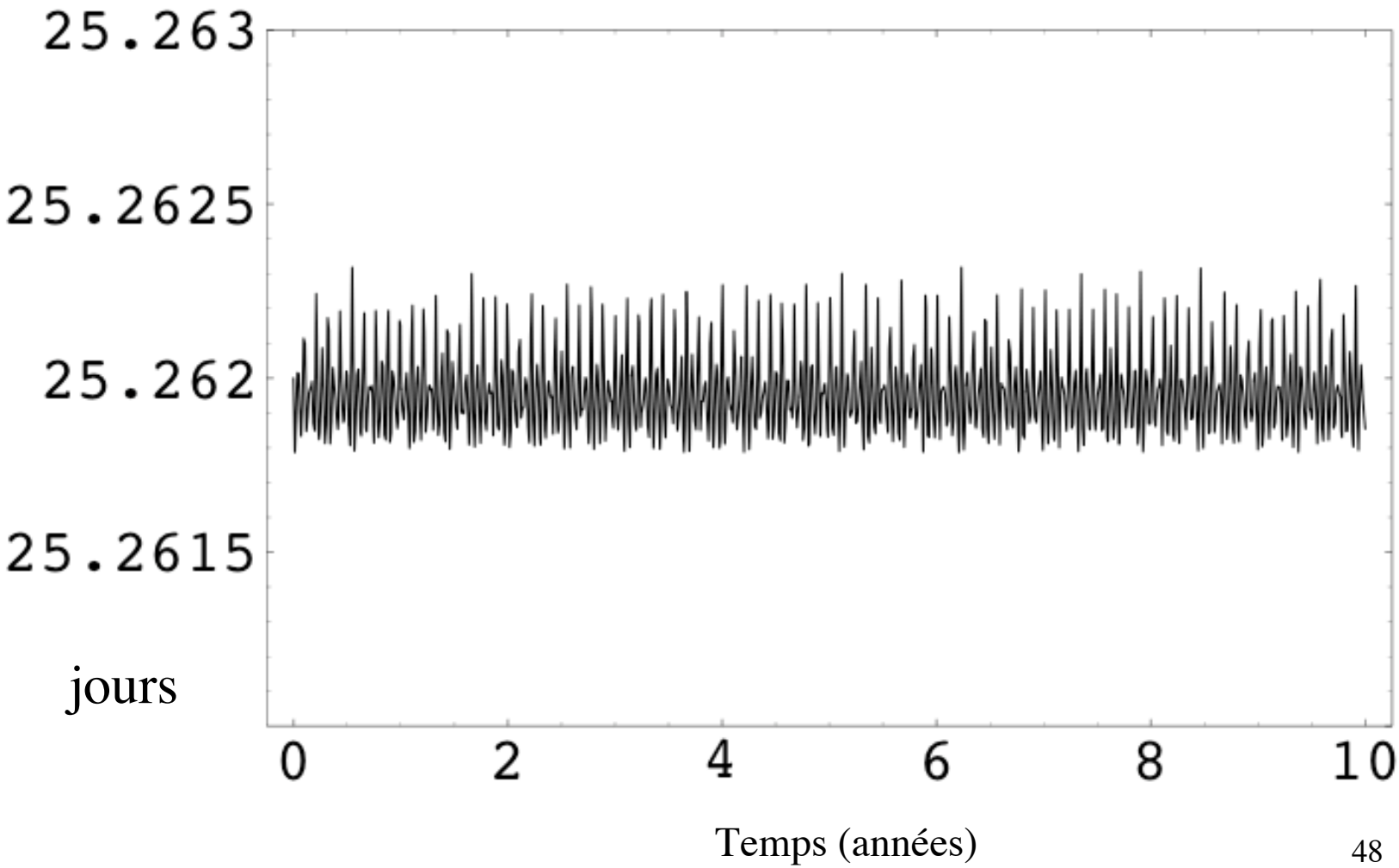

Temps (années)

# Variation excentricités : $e_B$ et $e_C$

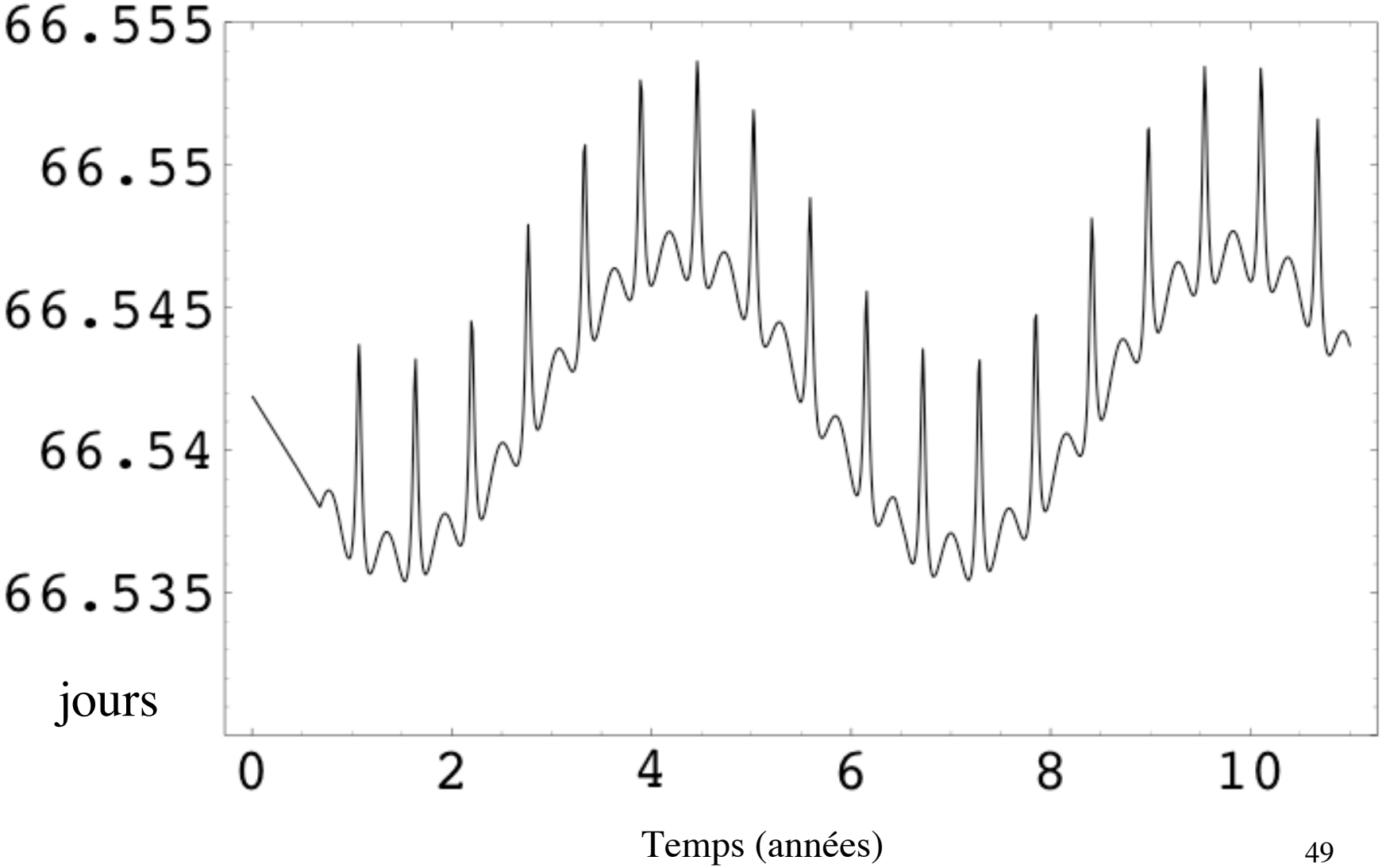



Temps (années)

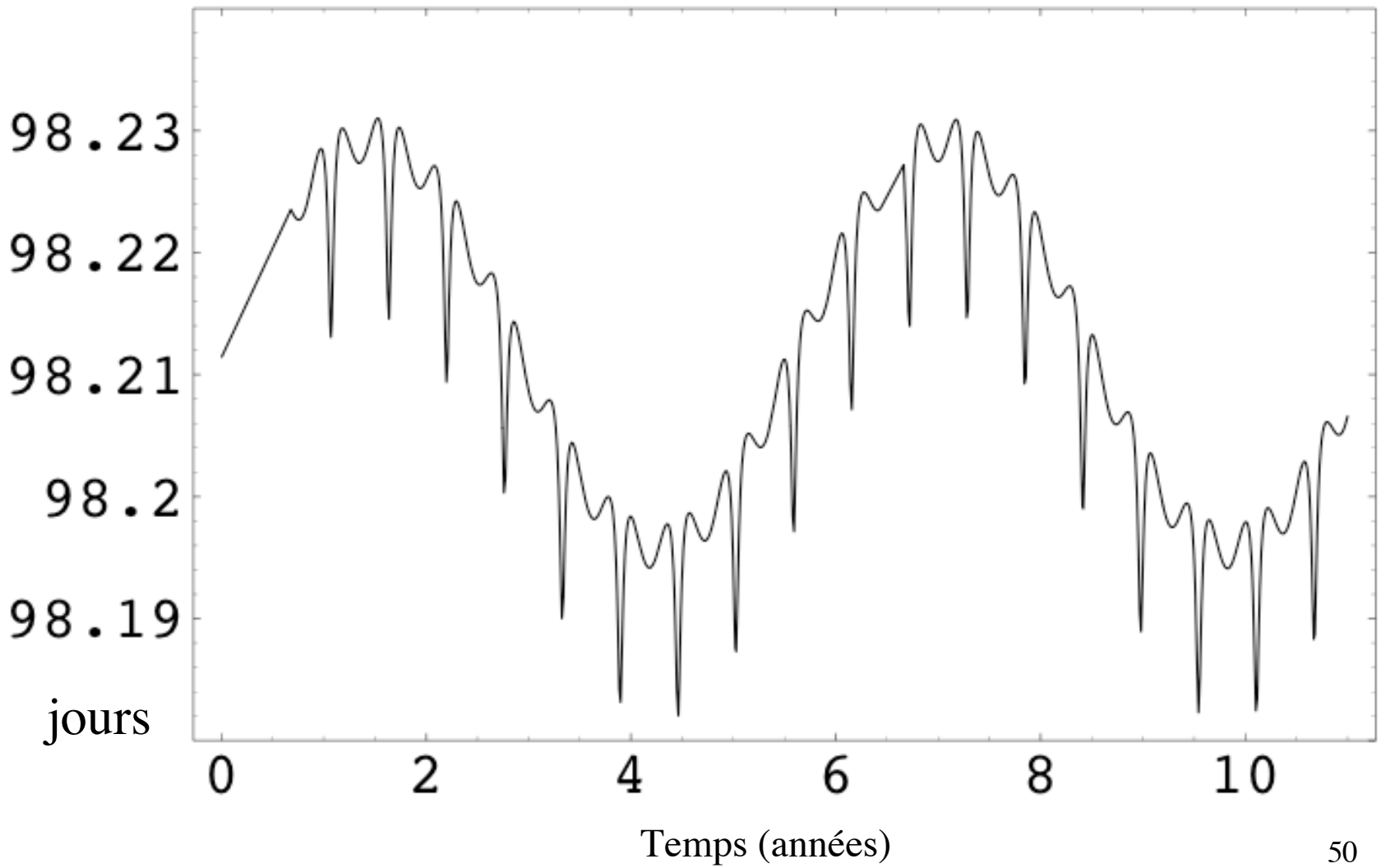
# Variation demi-grands axes et périodes: $P_A$



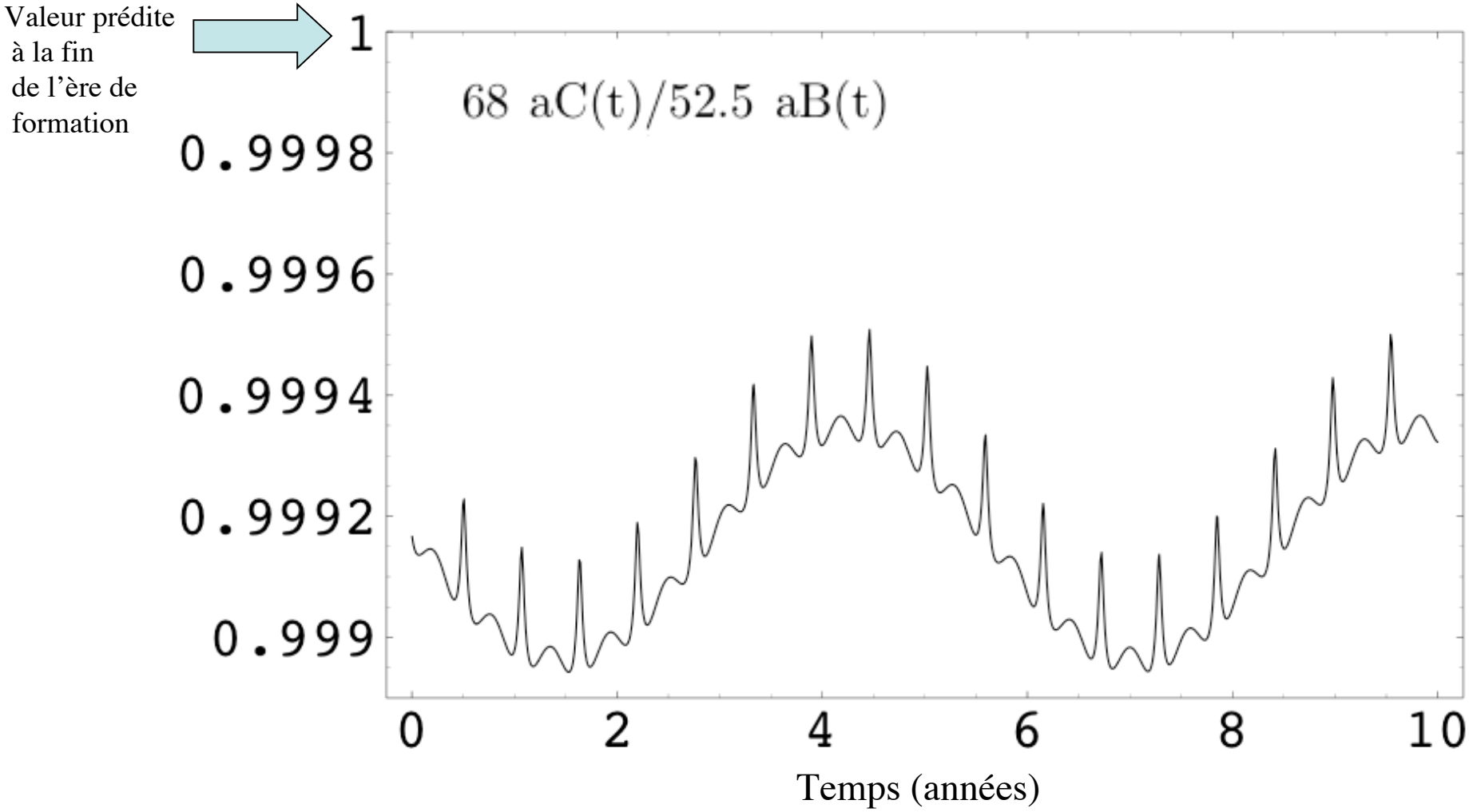
# Variation demi-grands axes et périodes: $P_B$



# Variation demi-grands axes et périodes: $P_C$



# Conséquence pour la prédiction TRE




Nouvelle amélioration d'un facteur 2 --> $n_B = 6.9985$

# Prédiction excentricité

Runge-Lenz --> prédiction théorique $e=k/n$

Mais on a vu que $e_B$ et $e_C$ varient beaucoup. Par contre, intégrale première $e_B^2 + K\, e_C^2$ ?

Transition disque de planétésimaux --> planètes:
Contraction : $n$ --> $k\, n$ (raccordement orbitales)

$$(1/6)^2 \left[ (1/7)^2 + K\, (1/8)^2 \right] = 0.001017$$

$$(e_B^2 + K\, e_C^2)_{obs} = 0.001005(18)$$

Très bon accord, à moins de 1 sigma --> Nouvelle prédiction possible:

$K_{pred} = 1.099 \pm 0.065$ → $m_C/m_B = 0.965 \pm 0.058$

(obs. 0.91 ±0.10)

# Conclusion et prospective

*Demi-grands axes: Amélioration d'un facteur 12 de l'accord théorie-observation pour le rapport C/A en prenant en compte l'évolution --> Niveau de précision $\delta n_A/n_A = 5 \times 10^{-5}$, dans les barres d'erreur expérimentales

*Nouvelle amélioration d'un facteur 2 de l'accord théorie-observation pour le rapport C/B en prenant en compte l'évolution --> niveau $\delta n_B/n_B = 2 \times 10^{-4}$

*Excentricités: accord théorie - observations pour l'intégrale première $e_B^2 + K\, e_C^2$ --> prédiction du rapport de masse

*Travaux futurs: description de la phase intermédiaire entre formation (régime Schrödinger) et évolution (régime Newton) : similaire à une transition quantique classique pour atome héliumoïde

*Estimation de la « largeur de raie » due à l'évolution temporelle lors de cette transition (formation de paquet d'onde) : $\delta n/n = 2.5 \times 10^{-4} \approx$ l'écart résiduel !